УДК 007:681.516.4

***А.О. Лозинський, Л.І. Демків***
Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна
lozynsky@polynet.lviv.ua, demkivl@gmail.com

# Умовно стійкі системи з фазі-регулятором

Розглянуто нелінійну динамічну систему $n$-го порядку, для якої побудовано нечіткий регулятор типу Такагі-Сугено. Встановлено критерій стійкості, що не залежить від виду функції перемикання, для системи 2 – 5 порядків, для яких відома передавальна функція.

## Вступ

Використання в об’єктах систем керування зі змінною структурою суттєво покращує динамічні властивості системи, адже дозволяє відносно простими засобами досягти необхідних вимог якості перехідного процесу. Зокрема в [1] досліджено стійкість систем зі змінною структурою за наявності постійно діючих збурень та недосконалостей в керуючому пристрої на об’єкті. Тут передбачається, що незалежно від комутації система залишається стійкою. В статті [2] досліджено стійкість систем зі змінною структурою для нелінійного та нестаціонарного об’єкта. Однак в обох цих статтях основним засобом досліджень виступає метод Ляпунова, що робить їх дещо академічними, адже на практиці не завжди вдається знайти такі функції для довільної системи. Природнім продовженням досліджень такого типу стали дослідження, в основу яких покладений апарат нечіткої логіки. Суттєвий прорив, зокрема, відбувся завдяки статті [3], де було запропоновано математичний апарат побудови нечіткої моделі. Його було використано, наприклад, в [4], [5], де для дослідження стійкості використовується метод Ляпунова, та в [6], де використовується коловий критерій. Ці дослідження стосувалися в першу чергу стійкості систем в цілому. Втім, у літературі не висвітлене питання дослідження стійкості системи в цілому, якщо одна з підсистем є нестійкою, що і є предметом дослідження авторів статті. Адже можливим є варіант синтезу різних систем (з різними критеріями якості) з можливістю переходу між критеріями якості. При такому підході можливо, що одна з підсистем і є нестійкою. Таким чином необхідно проаналізувати стійкість всієї системи при зміні $\mu$. В роботах [7], [8] сформовано критерій стійкості, коли всі підсистеми стійкі. Ці критерії є в матрично-векторній формі. Для аналогічних досліджень систем з нестійкою підсистемою використано критерій в частотній формі.

**Метою даної статті** є формулювання критерію стійкості систем, для яких відома передавальна функція.

## Постановка задачі

Розглянемо нелінійну систему, яку в загальному випадку можна описати за допомогою диференціального рівняння $n$-го порядку, яке можна звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\bar{x}'(t) = f\left(\bar{x}(t)\right) + g\left(\bar{x}(t)\right)\bar{u}(t) + \xi(t), \qquad (1)$$

де $\bar{\xi}(t)$ – зовнішні збурюючі впливи, $f\left(\bar{x}(t)\right)$ та $g\left(\bar{x}(t)\right)$ – нелінійні функції, описані в області робочих точок системи.

Лінеаризована система матиме вигляд

$$\Delta\dot{\bar{x}}(t) = A^*\Delta\bar{x}(t) + B^*\Delta\bar{u}(t),$$

де $\Delta\bar{x}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)$, $\Delta\bar{u}(t) = \bar{u}(t) - \bar{u}_0(t)$, $\bar{x}_0(t), \bar{u}_0(t)$ – вектори в околі яких розкладаємо в ряд Тейлора, $A^* = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n} = \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_j}$, $B^* = \left(b_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n} = \dfrac{\Delta g_i}{\Delta x_j}$.

Модель системи можна побудувати, використовуючи стандартний регулятор типу Такагі-Сугено [3]

$$\begin{aligned}
R_i:\quad & IF\quad x_1 \in M_1^i \; i \; x_2 \in M_2^i \; i \ldots x_n \in M_n^i \quad THEN \\
& \dot{\bar{x}}(t) = A_i\bar{x}(t) + B_i\bar{u}(t), \\
& IF\quad x_1 \in N_1^i \; i \; x_2 \in N_2^i \; i \ldots x_n \in N_n^i \quad THEN \\
& \bar{u}(t) = K_i\bar{x}(t), \qquad\qquad i = \overline{1,k},
\end{aligned}$$

де $R_i$ – $i$-е правило, $M_j^i, N_j^i, i = \overline{1,k}, \; j = \overline{1,n}$ – області розбиття, $A_i, B_i, K_i \in R^{n\times n}$ – матриці, що формують модель системи в околі певної робочої точки (локальна модель), $\bar{u}(t) \in R^n$ – вектор керуючих впливів.

Використовуючи дефазифікацію гравітаційним методом, отримаємо таку модель системи

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i(\bar{x})\left(A_i + B_i\sum_{j=1}^{k}\mu_j(\bar{x})K_j\right)\bar{x}(t),$$

де $\nu_i = \nu_i(\bar{x}) = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} M_j^i\left(x_j(t)\right)}{\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} M_j^i\left(x_j(t)\right)}$, $\mu_i = \mu_i(\bar{x}) = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} N_j^i\left(x_j(t)\right)}{\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} N_j^i\left(x_j(t)\right)}$, $M_j^i\left(x_j(t)\right)$, $N_j^i\left(x_j(t)\right)$ – функції належності $x_j(t)$ до відповідної області $M_j^i$ чи $N_j^i$, $\sum_{i=1}^{k}\nu_i = 1$, $\sum_{i=1}^{k}\mu_i = 1$.

Тобто модель $i$-ї системи матиме вигляд $\dot{\bar{x}}(t) = \left(A_i + B_iK_i\right)\bar{x}(t)$.

# Результати дослідження

В якості функції належності $\mu$ в даному дослідженні вибрано функцію (рис. 1) [9].

$$\Gamma(u;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & u < \alpha \\ (u-\alpha)/(\beta-\alpha), & \alpha \le u \le \beta \\ 1, & u > \beta \end{cases}.$$

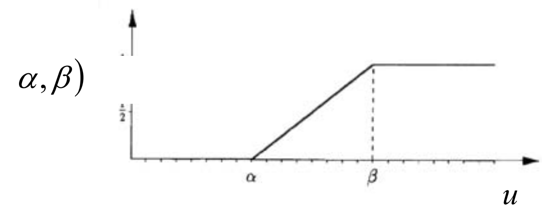



Рисунок 1 – Функція належності $\Gamma(u;\alpha,\beta)$.

Розглянемо функцію

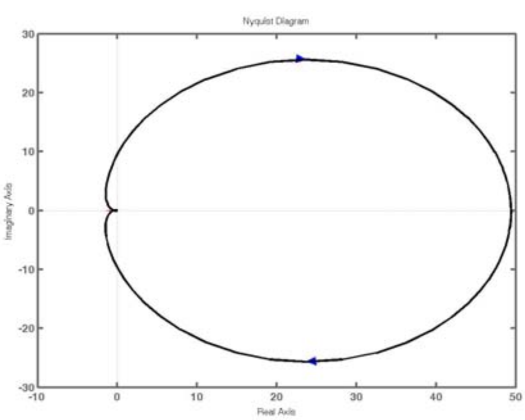
$$z(\omega,\mu) = \operatorname{Im}\big(W(j\omega,\mu)\big) / \operatorname{Re}\big(W(j\omega,\mu)\big), \tag{2}$$

де $W(j\omega,\mu)$ – це передавальна функція системи. В результаті проведених експериментів було встановлено, що стійкість системи залежить від кількості знакозмін функції (2) та її похідних чи їх комбінацій (табл. 1).

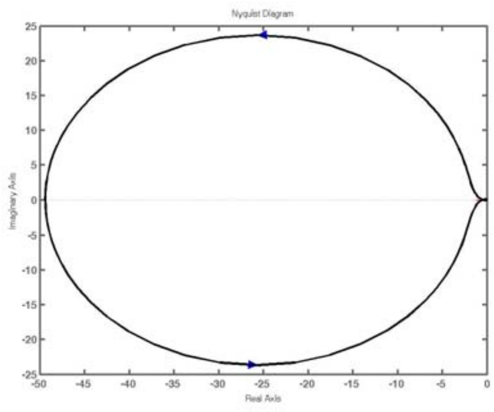
Таблиця 1 – Залежність вигляду досліджуваної функції від порядку системи

| Порядок системи | Вигляд досліджуваної функції |
|---|---|
| 2 | $z(\omega,\mu)$ |
| 3 | $z(\omega,\mu) + \partial z(\omega,\mu) / \partial\mu$ |
| 4 | $z(\omega,\mu)$ |
| 5 | $\partial^2 z(\omega,\mu) / \partial\mu^2$ |

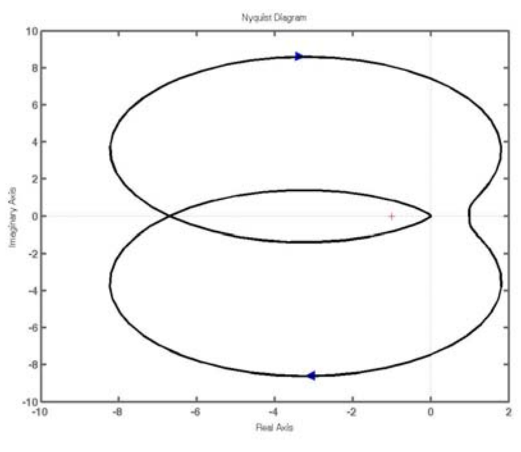
А саме, якщо при зміні $\mu$ кількість змін знаку функції (2) спадає, то в околі робочої точки система переходить в область стійкої роботи. Якщо ж такої зміни не відбувається, то всі підсистеми є стійкими.



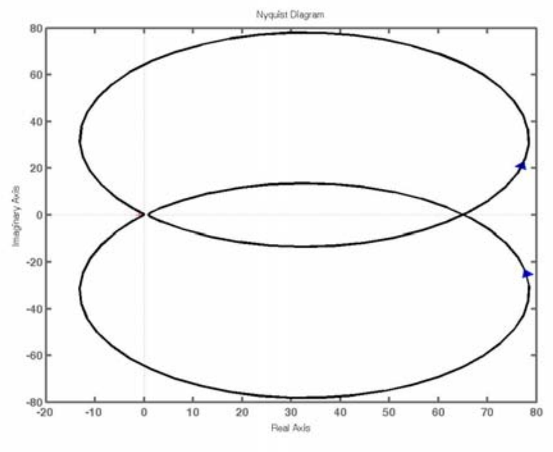

а) $\mu = 0,49$




б) $\mu = 0,51$




в) $\mu = 0,49$




г) $\mu = 0,51$

Рисунок 2 – Годографи системи третього порядку, в якій нестійка підсистема має один корінь в правій півплощині а) б); два корені в) г)

Даний критерій має ряд переваг порівняно з вже відомими. Зокрема, порівняно з критерієм Найквіста-Михайлова і похідним від нього – немає потреби візуальної перевірки стійкості системи при деякому значенні $\mu$. Адже можливою є комп'ютерна перевірка стійкості системи в деякому діапазоні значень $\mu$. Порівняно ж з методом пошуку коренів характеристичного багаточлена метод дає можливість застосування до всіх типів систем. Критерії Попова та Ляпунова вимагають пошуку невідомих констант чи функцій, що суттєво ускладнює їх застосування. Ще однією перевагою наведеного критерію є те, що його можна застосовувати до всіх типів систем, наприклад, на відміну від критерію Гурвіца, до нелінійних нестаціонарних систем другого-п'ятого порядків, а це цілком достатньо для всіх типів електромеханічних систем.

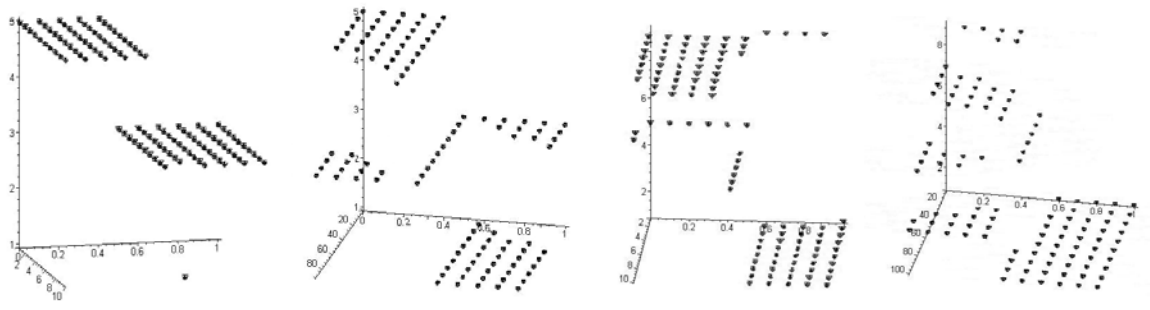
Виконані дослідження показали, що запропонований критерій дає такі ж результати, як і класичний метод пошуку коренів характеристичного багаточлена. Подібний результат можна отримати, використовуючи критерій Найквіста-Михайлова (рис. 2), але використання цього критерію не завжди дозволяє легко визначити стійкість системи, що знаходиться в околі межі стійкості.

Наведемо графіки залежності кількості знакозмін від значень $\mu$ для систем різних порядків для різних значень середньогеометричного кореня $\omega_0$.



а) $\omega_0 \in [1;10]$ б) $\omega_0 \in [10;100]$

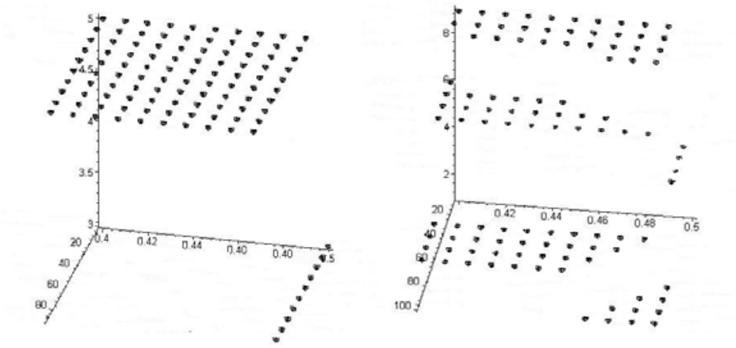
Рисунок 3 – Залежності кількості знакозмін у системі другого порядку від значення $\mu$



а) $\omega_0 \in [1;10]$ б) $\omega_0 \in [10;100]$ в) $\omega_0 \in [1;10]$ г) $\omega_0 \in [10;100]$

Рисунок 4 – Залежності кількості знакозмін у системі третього порядку від значення $\mu$ у випадку системи, в якої нестійка підсистема має один корінь в правій півплощині а) б); два корені в) г)

Очевидно, що для визначення точки переходу від нестійкої системи до стійкої нема сенсу шукати кількість знакозмін для всіх значень $\mu$. Достатньо робити це з певним кроком, постійно його зменшуючи до досягнення бажаної точності, що і продемонстровано на рис. 5 для системи третього порядку у випадку, коли нестійка підсистема має один та два корені в правій півплощині.

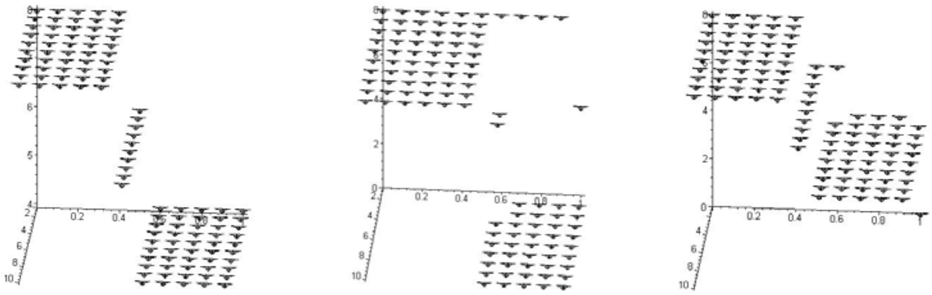


а) б)

Рисунок 5 – Залежності кількості знакозмін у системі третього порядку від значення $\mu$ у випадку системи, в якої нестійка підсистема має один (а) та два (б) корені в правій півплощині

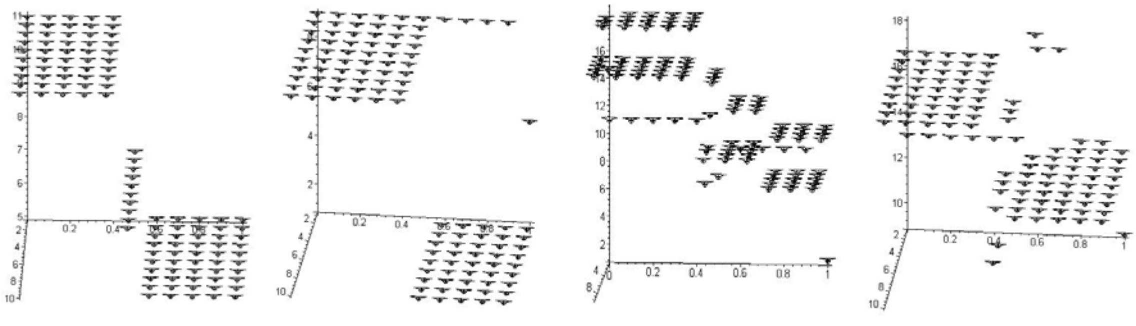
З рисунка бачимо, що перехід між стійкою і нестійкою підсистемами відбувається при $\mu \in [0,49; 0,50]$.

Подібні результати було одержано й для систем четвертого та п’ятого порядків (рис. 6 та рис. 7).



а) б) в)

Рисунок 6 – Залежності кількості знакозмін у системі четвертого порядку від значення $\mu$ у випадку системи, в якої нестійка підсистема має один корінь в правій півплощині а); два б) та три корені в)



а) б) в) г)

Рисунок 7 – Залежності кількості знакозмін у системі п’ятого порядку від значення $\mu$ у випадку системи, в якої нестійка підсистема має один корінь в правій півплощині а); два б) три в) та чотири корені г)

# Висновки

Отже, у даній роботі встановлено критерій стійкості системи (1), що не залежить від виду функції перемикання, який можна застосовувати до усіх типів систем 2 – 5 порядків для яких відома передавальна функція.

# Література

1. Иткис Ю.Ф. Об устойчивости некоторых систем с переменной структурой / Ю.Ф. Иткис // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 6. – С. 158-163.
2. Лозгачев Г.И. К вопросу об устойчивости систем автоматического регулирования с переменной структурой / Г.И. Лозгачев // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 1. – С. 19-25.
3. Takagi T. Fuzzy identificationof systems and its application to modeling and control/ T. Takagi, M. Sugeno // IEEE Trans. ono Syst. – 1985. – Том SMC-15, № 1. – С. 116-132.
4. Lam H.K. LMI-based stability design of fuzzy controller for nonlinear systems / H.K. Lam, L.D. Seneviratne // IET Control Theory Appl. – 2007. – Vol. 1. – № 1. – P. 393-401.
5. Chen C. Fuzzy Lyapunov method for stability conditions of nonlinear systems / Cheng-Wu Chen, Wei-Ling Chiang, Chung-Hung Tsai, Chen-Yuan Chen, Morris H.L.Wang // Int.J. Artificial Inteli.Tools. – 2006. – Vol. 15. – № 2. – P. 163-171.
6. Hongqian L. Stability analysis of the simplest Takagi-Sugeno fuzzy control system using circle criterion / Lu Hongqian, Huang Xianlin, Gao X.Z., Ban Xiaojun, Yin Hang // J. Sys.Engin. and Electr. – 2007. – Vol. 18. – № 2. – P. 311-319.
7. Лозинський А.О. Аналіз стійкості систем з регулятором Такагі-Сугено / А.О. Лозинський, Л. І. Демків // Искусственный интеллект. – 2008. – № 4. – С. 545-549.
8. Лозинський А.О. Дослідження стійкості систем з регулятором Такагі-Сугено-Канга / А.О. Лозинський, Л.І. Демків // Вісник НТУ «ХПІ» «Проблемы автоматизированного электропровода». – 2008. – Вип. 30. – С. 89-90.
9. Driankov D. Wprowadzenie do sterowania rozmytego / Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M. – Варшава : «Wydawnictwa Naukowo-Techniczne», 1996. – 320 p.

***А.О. Лозинский, Л.И. Дэмкив***

**Условно устойчивые системы с фаззи-регулятором**

Рассмотрена нелинейная динамическая система $n$-го порядка, для которой построен нечёткий регулятор типа Такаги-Сугено. Установлен критерий устойчивости, который не зависит от вида функции переключения для систем 2 – 5 порядков, для которых известна передаточная функция.

***A.O. Lozynsky, L.I. Demkiv***

**Conditionally Stable Systems with Fuzzy-controller**

Nonlinear dynamic system of $n$-th order is considered. Takagi-Sugeno fuzzy control is constructed for it. Stability criterion is presented which does not depend on the type of switching function for the 2 – 5 order systems for which the transfer function is known.

*Стаття надійшла до редакції 05.07.2010.*